

Несжимающее отображение компакта

THEOREM 1. Пусть (X, ρ) – компактное метрическое пространство и отображение $f : X \rightarrow X$ – несжимающее:

$$\rho(f(x), f(y)) \geq \rho(x, y). \quad (1)$$

Тогда если $f(X)$ – замкнуто, то $f(X) = X$.

В частности, если f – непрерывно, то $f(X)$ компактно и, следовательно, замкнуто.

Доказательство. Множество $U = X \setminus f(X)$ – открыто по условию.

Предположим, что $U \neq \emptyset$. Возьмем какую-нибудь точку $z \in U$.

В силу компактности X , последовательность $f^n(z)$ содержит подпоследовательность Коши: для любого $\varepsilon > 0$ найдутся целые неотрицательные m, n , $m > n$ такие, что $\rho(f^n(z), f^m(z)) < \varepsilon$. Отсюда по формуле (1) следует, что

$$\rho(z, f^{m-n}(z)) < \varepsilon.$$

Это противоречит открытости U .

ЧТД